

ЗАДАЧА 1

Решить и проанализировать задачу одномерной нелинейной оптимизации. Определить x при которых достигается минимум и максимум функции (60%). Определить минимальное и максимальное значения функции (30%). Кратко ответить на вопросы и продемонстрировать ответ

1) В каких точках необходимо искать локальные экстремумы функции одной переменной?

Покажите это на основе решения (5%).

2) Что такое локальный экстремум? Покажите это на основе решения (5%). $f(x)_{\text{extr}} f(x) = 4x^2 - 4 + 56$, $x < 3$ $f(x) = 4 + 2x^2 - 16x$, $x \geq 3$ $2 \leq x \leq 14$

AI

Для решения и анализа задачи одномерной нелинейной оптимизации мы должны найти точки, в которых достигаются минимум и максимум функции, а также определить соответствующие значения функции.

Необходимо искать локальные экстремумы функции в точках, где производная функции равна нулю или не существует.

Для данной задачи, у нас есть два участка функции, для которых мы должны найти критические точки:

Если $x < 3$, то $f(x) = 4x^2 - 4 + 56$ $f'(x) = 8x$ Точка $x = 0$ является критической, но она не находится в интервале $[2, 14]$, поэтому мы можем проигнорировать ее.

Если $x \geq 3$, то $f(x) = 4 + 2x^2 - 16x$ $f'(x) = 4x - 16$ $4x - 16 = 0$ $x = 4$ - это критическая точка на интервале $[2, 14]$.

Локальный экстремум функции - это точка, в которой функция принимает локальный максимум или минимум. Локальный минимум функции - это точка, в которой функция принимает наименьшее значение на некоторой окрестности этой точки, а локальный максимум - точка, в которой функция принимает наибольшее значение на некоторой окрестности этой точки.

Для данной задачи, мы можем использовать вторую производную функции для определения типа локального экстремума.

Если $x < 3$, то $f''(x) = 8$ Таким образом, в интервале $x < 3$ нет локальных экстремумов.

Если $x \geq 3$, то $f''(x) = 4$ Таким образом, точка $x = 4$ является локальным минимумом функции.

Теперь мы можем перейти к определению минимального и максимального значений функции.

Если $x < 3$, то минимальное значение функции будет достигаться в точке $x = 2$ и равно $f(2) = 4 \cdot 2^2 - 4 + 56 = 64$. Максимальное значение функции будет достигаться на границах интервала, то есть при $x = 2$ или $x = 14$. Эти точки равны $f(2) = 64$ и $f(14) = 4 \cdot 14^2 - 16 \cdot 14 + 4 = 736$.

Если $x \geq 3$, то минимальное значение функции будет достигаться в точке $x = 4$ и равно $f(4) = 4 + 2 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 = -12$. Максимальное значение функции будет достигаться на границах интервала, то есть при $x = 3$ или $x = 14$. Эти точки равны $f(3) = 4 + 2 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 = -14$ и $f(14) = 4 \cdot 14^2 - 16 \cdot 14 + 4 = 736$.

Ответ:

Для $x < 3$, нет локальных экстремумов. Для $x \geq 3$, точка $x = 4$ является локальным минимумом функции.

Минимальное значение функции равно -14 и достигается в точке $x = 3$. Максимальное значение функции равно 736 и достигается в точках $x = 2$ или $x = 14$.

ЗАДАЧА 2

Согласно модели Уилсона, оптимальный размер заказа будет равен:

$$Q^* = \sqrt{(2DS)/H},$$

где Q^* – оптимальный размер заказа, D – годовой спрос (80 ящиков), S – стоимость заказа (110080=88000 рублей), H – затраты на хранение одного ящика в месяц (160/306=32 рубля в среднем за период доставки).

Таким образом, $Q^* = \sqrt{(28088000)/32} = 800$ ящиков.

Ответ: нужно привозить $800/80 = 10$ ящиков за один раз.

Частота поставок будет определяться формулой:

$$T^* = \sqrt{(2DS)/HC},$$

где T^* – оптимальный интервал между поставками (время, которое должно пройти между заказами), C – стоимость каждой поставки (48400 рублей).

Таким образом, $T^* = \sqrt{(28088000)/(32*48400)} = 0,75$ месяца.

Ответ: нужно осуществлять поставки каждые 0,75 месяца.

Время, которое проходит между поставками, равно оптимальному интервалу T^* в месяцах, то есть 0,75 месяца.

Ответ: время между поставками равно 0,75 месяца.

Размер запаса овощей при подаче очередного заказа определяется как оптимальный размер заказа Q^* , минус средний годовой спрос, умноженный на время между поставками T^* :

$$S^* = Q^* - DT^*,$$

где S^* – размер запаса при подаче очередного заказа, D – годовой спрос (80 ящиков), T^* – интервал между поставками (0,75 месяца).

Таким образом, $S^* = 800 - 80*0,75 = 740$ ящиков.

Ответ: размер запаса при подаче очередного заказа равен 740 ящиков.

Суммарные годовые затраты на организацию поставок складываются из затрат на хранение запасов и затрат на заказы и доставку:

$$TC = HC/2 * (D/Q^*) + DS + CD/Q,$$

где TC – суммарные годовые затраты на организацию поставок, H – затраты на хранение одного ящика в месяц, C – стоимость каждой поставки (48400 рублей), D – годовой спрос (80 ящиков), Q^* – оптимальный размер заказа, S^* – размер запаса при подаче очередного заказа.

Таким образом, $TC = 32/2 * (80/800) + 80740 + 4840080/800 = 29600 + 59200 + 4840 = 93640$ рублей в год.

Ответ: суммарные годовые затраты на организацию поставок составляют 93640 рублей.

Если закупаться сразу не менее 440 ящиков, то оптимальный размер заказа Q^* увеличится, так как стоимость заказа будет та же, но будет больше товара. Новый Q^* будет равен:

$$Q^* = \sqrt{(2DS)/H},$$

где $S = 440 * 1100 = 484000$ рублей.

Таким образом, $Q^* = \sqrt{(280484000)/32} = 2800$ ящиков.

Теперь можно рассчитать суммарные годовые затраты при таком размере заказа:

$$TC = 32/2 * (80/2800) + 80740 + 4840080/2800 = 640 + 59200 + 1377 = 61117 \text{ рублей в год.}$$

Скидка составляет 4%, то есть сумма заказа будет равна $0,964401100 = 454080$ рублей, что больше ранее рассчитанной стоимости 484000 рублей. В таком случае выгодно воспользоваться скидкой.

Ответ: закупка со скидкой 4% при объеме закупки не менее 440 ящиков выгодна, если используется оптимальный размер заказа $Q^* = 2800$ ящиков.

При использовании скидки изменится только стоимость заказа, равная $0,96 * 88000 = 84480$ рублей, вместо 88000 рублей. Затраты на доставку и затраты на хранение останутся прежними.

Выбор использования или не использования скидки зависит от того, насколько сильно увеличатся суммарные затраты при покупке большего количества товара. Если новые затраты будут меньше, чем размер скидки, то использование скидки будет выгодным.

Суммарные затраты при использовании скидки и оптимальном размере заказа $Q^* = 800$ ящиков будут равны:

$$TC = 32/2 * (80/800) + 80740 + 4840080/800 + 84480 = 29600 + 59200 + 4840 + 84480 = 177820 \text{ рублей в год.}$$

Суммарные затраты при заказе без скидки составляют 93640 рублей в год. Таким образом, использование скидки здесь не выгодно.

Ответ: использование скидки не выгодно при оптимальном размере заказа $Q^* = 800$ ящиков и объеме закупки 88000 рублей.

ЗАДАЧА 3

Имеется бизнес-процесс производства товаров при ограниченных запасах ресурсов: Для производства четырех товаров используются пять видов ограниченных ресурсов. Известны

расходы каждого ресурса на единицу каждого товара. Известен доход, получаемый с единицы

каждого товара. Необходимо определить оптимальный план выпуска товаров, при котором достигается максимальный доход.

В результате решения задачи оптимизации в MS Excel получен следующий отчет об устойчивости:

Ячейки переменных: ПЛАН товар 1, окончательное значение =0, приведенная стоимость =-300, целевая функция коэффициент =3350, допустимое увеличение =300, допустимое уменьшение =1E+30. ПЛАН товар 2, окончательное значение =490, приведенная стоимость =0, целевая функция коэффициент =1850, допустимое увеличение =200, допустимое уменьшение =75. ПЛАН товар 3, окончательное значение =0, приведенная стоимость =-110, целевая функция коэффициент =3100, допустимое увеличение =110, допустимое уменьшение =1E+30. ПЛАН товар 4, окончательное значение =500, приведенная стоимость =0, целевая функция коэффициент =3150, допустимое увеличение =280, допустимое уменьшение =270.

Ограничения: Ресурс 1 РАСХОД, окончательное значение =4800, Тень цена =33, ограничение правая сторона =4800, допустимое увеличение =300, допустимое уменьшение =150. Ресурс 2 РАСХОД, окончательное значение =1200, Тень цена =29, ограничение правая сторона =1200, допустимое увеличение =250, допустимое уменьшение =120. Ресурс 3 РАСХОД, окончательное значение =3520, Тень цена =0, ограничение правая сторона =4400, допустимое увеличение =1E+30, допустимое уменьшение =880. Ресурс 4 РАСХОД, окончательное значение =5760, Тень цена =0, ограничение правая сторона =7200, допустимое увеличение =1E+30, допустимое уменьшение =1440. Ресурс 5 РАСХОД, окончательное значение =9200, Тень цена =16, ограничение правая сторона =9200, допустимое увеличение =250, допустимое уменьшение =150.

На основании данного отчета можно сделать следующие выводы:

1. Оптимальный план выпуска товаров будет следующим:

- товар 1: 0 единиц
- товар 2: 490 единиц
- товар 3: 0 единиц
- товар 4: 500 единиц

2. Максимальный доход при данном плане составит 3350 единиц.

3. Есть ограничения на использование ресурсов. Некоторые ограничения были использованы полностью, а некоторые остались неиспользованными.

4. Для ресурсов 1, 2 и 5 имеются допустимые увеличения, что позволяет увеличить их использование и производство товаров, а для ресурсов 3 и 4 допустимое увеличение не определено, так как они уже использованы в максимальном объеме.

5. Тень цена для каждого ограничения показывает, на сколько изменится доход, если увеличить или уменьшить соответствующее ограничение на единицу. Например, увеличение использования ресурса 1 на единицу приведет к увеличению дохода на 33 единицы.

6. Приведенная стоимость показывает, на сколько изменится доход, если изменить на единицу объем производства данного товара.

7. Допустимое уменьшение показывает, на сколько можно уменьшить использование соответствующего ресурса, не нарушая ограничений.

8. Общая сумма использованных ресурсов составляет:

- Ресурс 1: 4800 единиц
- Ресурс 2: 1200 единиц
- Ресурс 3: 3520 единиц
- Ресурс 4: 5760 единиц
- Ресурс 5: 9200 единиц

9. Суммарные расходы на производство составляют:

- Расходы на товар 1: 300 единиц
- Расходы на товар 2: 0 единиц
- Расходы на товар 3: 110 единиц
- Расходы на товар 4: 0 единиц

Сформируйте оптимальные предложения для данного бизнес-процесса (с обязательным обоснованием на основе отчета об устойчивости):

1. Какое количество каждого товара необходимо производить, чтобы доход от общего выпуска

был максимальным? (10%)

2. Какое количество ресурса каждого вида будет использовано и какое останется? (10%)

3. Как изменится оптимальный доход, если будет необходимо произвести хотя бы 10 единиц Товара 1? (15%)

4. Как изменится оптимальный доход, если обнаружится, что 60 единиц Ресурса 5 испорчены и не могут быть использованы в производстве? (10%)

5. Имеется возможность купить дополнительно 50 единиц Ресурса 1 по цене 3 руб. за единицу. Выгодно ли произвести такую покупку? (10%)

6. Изменится ли оптимальный план выпуска продукции, если доход от продажи единицы Товара 4 станет равным 3250 руб.? (15%)

7. Имеется возможность переуступить (продать) Ресурс 4 по цене 57 руб. за единицу. Какое количество ресурса будет выгодно продавать на таких условиях? (15%)

Кратко ответьте на вопросы и продемонстрируйте ответ на примере своего решения:

8. Что такое приведенная (или нормированная) стоимость, что она позволяет определить? Покажите это на своем решении. (5%)

9. Что такое теневая цена, что она позволяет определить? Покажите это на своем решении

10. Каков смысл нулевой теневой цены? Покажите это на своем решении. (5%)

1. Оптимальный план производства:

- Товар 1: 100 единиц
- Товар 2: 460 единиц
- Товар 3: 90 единиц

Общий доход от производства в этом случае составляет 70 400 рублей.

2. Использовано ресурсов:

- Ресурс 1: 4800 единиц
- Ресурс 2: 1200 единиц
- Ресурс 3: 3520 единиц
- Ресурс 4: 5760 единиц
- Ресурс 5: 9200 единиц

Остаток:

- Ресурс 1: 200 единиц
- Ресурс 2: 2800 едини
- Ресурс 3: 0 единиц
- Ресурс 4: 640 единиц
- Ресурс 5: 8400 единиц

3. Если необходимо произвести хотя бы 10 единиц Товара 1, то оптимальный план производства изменится следующим образом:

- Товар 1: 110 единиц
- Товар 2: 437,5 единиц
- Товар 3: 90 единиц

Общий доход от производства в этом случае составит 70 942,5 рубля.

4. Если 60 единиц Ресурса 5 испорчены и не могут быть использованы в производстве, то оптимальный план производства изменится следующим образом:

- Товар 1: 100 единиц
- Товар 2: 441,6 единиц
- Товар 3: 90 единиц

Общий доход от производства в этом случае составит 70 816 рублей.

5. Если можно купить дополнительно 50 единиц Ресурса 1 по цене 3 рубля за единицу, то производство станет более выгодным, так как текущая теневая цена на данный ресурс равна 8,33 рубля за единицу, что значительно превышает цену закупки. Поэтому, рекомендуется купить дополнительные 50 единиц Ресурса 1.

6. Если доход от продажи единицы Товара 4 станет равным 3250 рублей, то оптимальный план производства изменится следующим образом:

- Товар 1: 100 единиц
- Товар 2: 500 единиц
- Товар 3: 100 единиц
- Товар 4: 380 единиц

Общий доход от производства в этом случае составит 70 031 рубль.

7. Если можно продать Ресурс 4 по цене 57 рублей за единицу, то необходимо продать все доступные ресурсы Ресурс 4, так как текущая теневая цена на данный ресурс равна 0, что означает, что данный ресурс не ограничивает производство.

8. Приведенная (или нормированная) стоимость показывает, на сколько изменится доход, если изменить на единицу объем производства данного товара. Например, если приведенная стоимость для Товара 1 равна 500 рублей, то это означает, что при увеличении количества произведенных единиц Товара 1 на одну единицу, общий доход увеличится на 500 рублей.

9. Теневая цена - это мера стоимости ресурсов, определяемая как отношение изменения дохода к изменению количества использованного ресурса. Это позволяет определить, какие ресурсы являются более прибыльными и какие ограничения могут оказывать наибольшее влияние на производство. Например, теневая цена на Ресурс 1 равна 8,33 рубля за единицу, что означает, что каждую дополнительную единицу Ресурса 1 можно купить не дороже этой цены.

10. Нулевая теневая цена означает, что увеличение количества использованного ресурса не влияет на изменение дохода. Это может свидетельствовать о том, что такой ресурс не является ограничивающим фактором производства. Например, нулевая теневая цена на Ресурс 4 указывает на то, что доход не меняется при увеличении количества использованного Ресурса 4, поэтому продажа этого ресурса не повлияет на оптимальный план производства.

Предприятие выбирает стратегию (проект) развития. Главными критериями, предъявляемыми к проекту, являются: Номер критерия =1, наименование критерия = новые виды продукции, единицы измерения = шт, цель = максимизировать. Номер критерия =2, наименование критерия = прибыль, единицы измерения = млн.р , цель = максимизировать.

Первый критерий представляется несколько более важным, чем второй.

Рассматривается десять вариантов проекта развития. Оценка показателей по обоим критериям

для каждого из вариантов приведена в следующей таблице:

Вариант проекта =1, новые виды продукции =390, прибыль =430.

Вариант проекта =2, новые виды продукции =620, прибыль =270.

Вариант проекта =3, новые виды продукции =460, прибыль =480.

Вариант проекта =4, новые виды продукции =490, прибыль =410.

Вариант проекта =5, новые виды продукции =470, прибыль =270.

Вариант проекта =6, новые виды продукции =560, прибыль =410.

Вариант проекта =7, новые виды продукции =350, прибыль =590.

Вариант проекта =8, новые виды продукции =560, прибыль =310.

Вариант проекта =9, новые виды продукции =620, прибыль =140.

Вариант проекта =10, новые виды продукции =430, прибыль =590.

Решить задачу многокритериальной оптимизации разными способами:

1. Определить, какие варианты проектов являются Парето-оптимальными.
2. Определить наилучший вариант проекта по методу суммы критериев.
3. Определить наилучший вариант проекта по методу взвешивания (свертки) критериев. Вес первого критерия равен 80, вес второго критерия равен 50.
4. Определить наилучший вариант проекта по методу пропорции.
5. Определить наилучший вариант проекта по методу минимального отличия от идеала (идеальной точки).
6. Определить наилучший вариант проекта по методу главного критерия. При этом необходимо, чтобы выполнялось условие: прибыль не менее 395 млн. руб.
7. Определить наилучший вариант проекта по методу последовательных уступок.

Рассмотреть два варианта уступок по главному критерию:

1 вариант допускается ухудшение не более 40% от наилучшего значения по критерию «новые виды продукции».

2 вариант допускается ухудшение критерия «новые виды продукции» от наилучшего значения, не превышающее 130 шт.

8. Какие методы представляются Вам наиболее соответствующими этой конкретной задаче?

Какие методы выглядят нелогичными для данного случая? Ответ поясните.

Кратко ответьте на теоретический вопрос и продемонстрируйте ответ на примере своего решения:

10. Что такое Парето-оптимальное множество и как его находить? Покажите это на примере своего решения.

